

Alıştırılmalar :

1) a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı derecesi 3 olan tüm monik indirgenemez polinomları listeleğin.

b) f , a) da belirlenenlerde polinomlardan birisi olsun. K , f 'nin parçalama cismi olsun, ve α , f 'nin bir kökü olsun. $\alpha^4 + \alpha$ 'yı $1, \alpha, \alpha^2$ 'in lineer kombinasyonu olarak ifade ediniz.

2) a) f , \mathbb{F} 'in ^{12. dereceden} ilkel bir kökü olsun (f 'ya n -inci dereceden ilkel kök denilir, eğer $f^n = 1$ ve f 'nin mertebesi n 'dir). f 'nin \mathbb{F} üzerindeki minimal polinomunu bulunuz.

b) f 'yu \mathbb{F} ord ord kök olarak ifade edebileceğimizi gösteriniz.

3) a) A katsayılarını \mathbb{F} 'den olan bir $n \times n$ 'ye matrix olsun. \mathbb{F} üzerinde derecesi n olan A 'yı kök kabul eden bir polinomun varlığını gösteriniz.

b) A 'nın mertebesinin 3 olması için gerek ve yeter koşul A 'nın $X^2 + X + 1$ polinomunun kökü olmasıdır.

4) \mathbb{F} , $\mathbb{1}$ 'in 12.inci dereceden ilkel bir kök

olsun. $K = \mathbb{Q}(\mathbb{F}, \sqrt{5})$ olsun.

Bu soruda K 'nin \mathbb{Q} üzerindeki derecesini belirleyeceğiz. K 'nin \mathbb{Q} 'nın bir Galois genişlemesi olduğunu göreceğiz. K/\mathbb{Q} 'nin Galois grubunu belirleyeceğiz. Bu grubun alt gruplarını belirleyeceğiz ve K/\mathbb{Q} 'nin ara cisimlerini belirleyeceğiz.

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 'nin \mathbb{Q} üzerindeki derecesi nedir?

b) $x^2 - 5$ polinomunun $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ üzerinde indirgenmez olduğunu gösteriniz.

c) K 'nin \mathbb{Q} üzerindeki derecesi nedir?

d) G ile K den \mathbb{C} 'ye olan gömümler (embeddings) ~~iki~~ gösterelim.

$$\varphi: G \rightarrow \left\{ (a, b) \mid a^2 = 5, b, \mathbb{1}'\text{in } \overset{12.\text{nci dereceden}}{\text{ilkel bir kök}} \right\}$$

$$\sigma \mapsto (\sigma(\sqrt{5}), \sigma(\mathbb{1}))$$

tasvirini düşünelim.

φ 'nin injektif (1-1) olduğunu göstermiş. φ 'nin örten olduğu sonucuna ulaşmış. K 'nin \mathbb{Q} üzerinde Galois olduğu sonucuna ulaşmış (birebirlik, G , K/\mathbb{Q} genişlemesinin Galois grubu olur).

e) G 'nin değişmeli olmadığını göstermiş.

f) G 'nin tüm elemanlarının mertebesi 2 olduğunu belirlemiştir.

g) Bir önceki soruya kullanarak G 'nin tam 3 tane mertebesi 4 olan alt ~~ve grubu~~ tam 1 tane mertebesi 2 olan alt grubu olduğunu sonucuna ulaşmış. Bu alt gruplar neledir?

h) Eğer mertebesi 4 olan alt grupları S_1, S_2, S_3 ile ve mertebesi 2 olan alt grubu τ ile gösterirsek, bu alt grupların sabit elemanları (K_1, K_2, K_3, K_4) ~~şey~~ nelerdir?

1) Son üç sitedeki sonuçları kullanarak G 'nin alt gruplarıyla birlikte oluşan K/\mathbb{Q} 'nun ara elemanlarının diagramını çizin.

Not: Yukarıda bildiğimiz 6 grubu (K/\mathbb{Q} 'nun Galois grubu) Matematikte Quantum grup olarak bilinir. İkinci en küçük deşimal olmayan grup. İki S_3 'tür. (S_3 'ün mertebesi 6 olduğunu hatırla).