

Blatt Klausur

Prof. Dr. N-P. Skoruppa und Dr. Jan Fricke
 Bachelor/Diplom
 w3.countnumber.de

Abgabe: Lehramt und

Di, 11. Juli 06

Bitte schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen und auf das erste Blatt zusätzlich Ihre Matrikelnummer, Ihren Studiengang, Ihr Geburtsdatum und Ihren Geburtsort

Aufgabe 1. (5 Punkte) Bestimmen Sie alle rationalen Lösungen (x, y) von

$$x^2 + xy - y^2 = 1 .$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, und für jede Einheit seine Ordnung.

Aufgabe 3. (2+2+1 Punkte) Seien g und f zwei arithmetische Funktionen, und sei λ die Liouville-Funktion¹. Wir wollen zeigen, dass

$$g(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \text{ quadratfrei}}} f(d)$$

genau dann für alle n gilt, wenn

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \lambda\left(\frac{n}{d}\right)$$

für alle n erfüllt ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(1) Formulieren Sie die beiden Identitäten als Identitäten zwischen Funktionen (Sie werden das Dirichletprodukt benötigen). Dazu müssen Sie in der ersten Gleichung eine geeignete Funktion δ definieren.

(2) Zeigen Sie, dass die Funktion δ (bezüglich des Dirichletprodukts) invers zu λ ist.

(3) Folgern Sie hieraus die angeführte Äquivalenz.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen x des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 5 \pmod{11} \\ 3^x &\equiv 9 \pmod{11} \end{aligned}$$

¹ λ ist die multiplikative arithmetische Funktion mit $\lambda(p^n) = (-1)^n$ für Primzahlpotenzen p^n .

Aufgaben zur Zahlentheorie - 2006

Aufgabe 5. (2 Punkte) Sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass 5 quadratischer Rest modulo p ist, wenn $p \equiv 1$ oder $-1 \pmod{5}$ gilt.