

## Nachklausur

Prof. Dr. N-P. Skoruppa und Dr. Jan Fricke  
www.countnumber.de

1. Oktober 2008

**Aufgabe 1.** Im Jahr 2000 gab es einen sehr guten Bordeaux, eine derartige Weinernte erwartet man alle 15 Jahre. In Italien gab es 2003 einen sehr guten Jahrgang Frascati, den man nur alle 17 Jahre erwartet. Wann ist das nächste Jahr, in dem man gleichzeitig einen sehr guten Jahrgang Bordeaux und Frascati hat?

**Aufgabe 2.** Finden Sie alle rationalen Nullstellen der diophantischen Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenz

$$x^3 + 3x - 1 \equiv 0 \pmod{7^3}.$$

**Aufgabe 4.** Geben Sie jeweils eine reelle Zahl an, deren Kettenbruchentwicklung

1. abbricht,
2. periodisch ist,
3. periodisch mit Periodenlänge mindestens 3 ist,
4. nicht periodisch ist.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort, indem Sie zum Beispiel einen entsprechenden Satz aus der Vorlesung zitieren.

**Aufgabe 5.** Für welche Primzahlen  $p$  hat die Gleichung  $x^2 + xy + 2y^2 = 0$  in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  eine von  $(0, 0)$  verschiedene Lösung? (Hinweis: Benutzen Sie quadratische Reziprozität.)

**Aufgabe 6.** Es bezeichne  $f$  die folgendermassen definierte arithmetische Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 3 \mid n \\ -1 & \text{falls } 3 \mid (n + 1) \\ +1 & \text{falls } 3 \mid (n - 1) \end{cases}.$$

- (a) Untersuchen Sie, ob  $f$  multiplikativ bzw. stark multiplikativ ist.
- (b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen  $n$ , sodass die summatorische Funktion  $F$  von  $f$  an der Stelle  $n$  verschwindet.